

# Pauta C1 MA22A Cálculo en Varias Variables

## Semestre Otoño 2005

Prof: Marcelo Leseigneur  
Auxs: Sebastián Court, Rodrigo Assar

### Preguntal.-

- (a) (i) El conjunto corresponde a  $\mathbb{R}_0^+$ , definido como  $\mathbb{R}^+$  sin los naturales.  
 $int A = A$ ,  $adh A = \mathbb{R}_0^+$ ,  $fr A = \mathbb{N}$ .  
El conjunto es abierto.
- (ii) El conjunto corresponde a los ejes  $x$  e  $y$ .  
 $int A = \phi$ ,  $adh A = A$ ,  $fr A = A$ .  
El conjunto es cerrado.
- (iii) El conjunto corresponde a una nube de puntos pero que es continua en el eje  $y$ . Es decir, son rectas paralelas al eje  $y$  muy apretadas (pues  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ ).  
 $int A = \phi$ ,  $adh A = \mathbb{R}^2$ ,  $fr A = \mathbb{R}^2$ .  
El conjunto no es cerrado ni abierto.
- (iv) Corresponde al intervalo  $(0, 4)$  en el eje  $x$ , pero en  $\mathbb{R}^2$ .  
 $int A = \phi$ ,  $adh A = A \cup \{(0, 0), (4, 0)\}$ ,  $fr A = A \cup \{(0, 0), (4, 0)\}$ .  
El conjunto no es cerrado ni abierto.
- (b) (i) Verdadero.  
Notemos que  $E \setminus \{x_0\}$  es abierto. En efecto, sea  $x \in E \setminus \{x_0\}$  entonces la bola  $B_{\|\cdot\|}(x, \frac{1}{2}\|x - x_0\|)$  está contenida en  $E \setminus \{x_0\}$  (pues  $x_0 \notin B_{\|\cdot\|}(x, \frac{1}{2}\|x - x_0\|)$ ). Como  $A \setminus \{x_0\} = A \cap (E \setminus \{x_0\})$  y la intersección de dos conjuntos abiertos es abierto se tiene el resultado pedido.
- (ii) Verdadero.  
Sea  $x \in int(A)$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  de modo que  $B_{\|\cdot\|}(x, \epsilon) \subseteq A$ . Como  $A \subseteq B$ , entonces  $B_{\|\cdot\|}(x, \epsilon) \subseteq B$ . En consecuencia  $x \in int(B)$ , como esto es válido para todo  $x \in int(A)$  se concluye que  $int(A) \subseteq int(B)$ .
- (iii) Falso  
Considerar como antes  $E = \mathbb{R}$  usando como norma el valor absoluto. Sean  $A = (a, b)$  y  $B = (c, d)$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $c < a < b < d$ . Se tiene que  $A \subseteq B$  pero  $fr(A) = a, b$  y  $fr(B) = c, d$ , con lo cual  $fr(A)$  y  $fr(B)$  ni siquiera se intersectan.
- (iv) Verdadero  
Supongamos que  $x_0 \notin X$ , si  $x_0$  está en  $Fr(X)$  entonces:  $\forall \epsilon > 0$  existen  $x_1, x_2 \in B_{\|\cdot\|}(x_0, \epsilon)$  de modo que  $x_1 \in X$  y  $x_2 \in E \setminus X$ . En consecuencia;  $\forall \epsilon > 0 \exists y = x_1 \in X$  con  $y \in B_{\|\cdot\|}(x_0, \epsilon)$  y, como  $x_0 \notin X$ ,  $y \neq x_0$ . Es decir  $x_0$  es punto de acumulación de  $X$ .

### Pregunta2.-

- (a) (i)  
 $\Rightarrow$ : Es directo, pues si  $L$  es continua en  $E$  en particular lo es en 0.  
 $\Leftarrow$ : Supongamos que  $L$  es continua en 0 y sea  $x_0 \in E$ .  
Demostraremos que  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \rightarrow x_0$  se tiene que  $Lx_n \rightarrow Lx_0$ .

Notemos que definiendo  $y_n = x_n - x_0 \rightarrow 0$  entonces  $Ly_n \rightarrow L0 = 0$ .  
 $\Rightarrow Lx_n - Lx_0 \rightarrow 0 \Rightarrow Lx_n \rightarrow Lx_0$  y por lo tanto  $L$  es continua en  $x_0$ . Y como nunca escogimos un  $x_0$  en particular, la propiedad se tiene para todo  $x_0 \in E$ .

(ii)

$\Rightarrow$ : Como  $L$  es continua en 0, se tiene que:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $\|x\|_E \leq \delta$  entonces  $\|Lx\|_F \leq \varepsilon$ .

Sea  $\varepsilon = 1$  y  $x \in E$  con  $x \neq 0 \Rightarrow \|\frac{\delta x}{\|x\|_E}\|_E = \delta \Rightarrow \|L(\frac{\delta x}{\|x\|_E})\|_F \leq 1$ .

Como  $L$  es lineal se tiene que:  $\|Lx\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\delta} \forall x \in E$ . Se concluye tomando  $c = \frac{1}{\delta}$ .

$\Leftarrow$ : Supongamos que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\|Lx\|_F \leq c \cdot \|x\|_E$ . Si  $c \leq 0$  entonces  $\forall x \in E \quad \|Lx\|_F = 0$  y en consecuencia  $L \equiv 0$  que es claramente continua en 0.

Si  $c > 0$  entonces sea  $\epsilon > 0$ , si  $\|x - 0\|_E < \delta$  en que definimos  $\delta = \frac{\epsilon}{c}$  se tiene que  $\|Lx - 0\|_F \leq \epsilon$ . Es decir,  $L$  es continua en 0.

**También se puede demostrar del siguiente modo:**

Demostraremos que  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \rightarrow 0$  se tiene que  $Lx_n \rightarrow L0 = 0$ .

Sea  $x_n \rightarrow 0$  entonces se tiene que  $\|Lx_n\|_F \leq c \cdot \|x_n\|_E \rightarrow c \cdot 0$ .

$\Rightarrow \|Lx_n\|_F \rightarrow 0 \Rightarrow Lx_n \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $L$  es continua en 0.

(b) Como  $x_{k,1} > 0$  y  $x_{k,2} > 0$  se puede ocupar la desigualdad clásica

$$\forall a, b \geq 0 \quad 2ab \leq a^2 + b^2 \quad ,$$

con  $a = \sqrt{x_{k,1}}$ ,  $b = \sqrt{x_{k,2}}$ .

Con ello deducimos que  $x_{k+1,1} \leq x_{k+1,2} \quad \forall k \geq 0$ .

Entonces  $x_{k,2} \geq x_{k,1} \quad \forall k \geq 1$  y, como

$x_{k+1,1} = \sqrt{x_{k,1}x_{k,2}}$  y  $x_{k+1,2} = \frac{x_{k,1} + x_{k,2}}{2} \quad \forall k \geq 0$  se obtiene que  $\forall k \geq 1$

$$x_{k+1,1} \geq x_{k,1} \quad \text{y},$$

$$x_{k+1,2} \leq x_{k,2}.$$

Así,  $\forall k \geq 1$ , tenemos que las sucesiones coordenada cumplen las siguientes cotas:

$$x_{k,1} \leq x_{k,2} \leq x_{1,2} \quad \text{y},$$

$$x_{k,2} \geq 0 \quad .$$

En consecuencia  $\{x_{k,1}\}_{k \geq 1}$  es creciente y acotado por arriba, mientras que  $\{x_{k,2}\}_{k \geq 1}$  es decreciente y acotado por abajo, por lo que ambas deben converger y entonces  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  converge.

Como sabemos que existe, tomemos límite a ambos lados de la igualdad  $x_{k+1,2} = \frac{x_{k,1} + x_{k,2}}{2}$ , obtenemos que

$$x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ,$$

si llamamos  $x_1$  al límite para la primera coordenada y  $x_2$  al de la segunda. Despejando se obtiene que  $x_2 = x_1$ .

### Pregunta3.-

- (a) (i)(1.5 pts.) Como  $T_0 = T$  es una función contractante (llamemos  $L$  a la constante de contractancia), por el Teorema del punto fijo de Banach existe un único  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que  $T_0(x_0) = T(x_0) = x_0$ . Sean  $u \in \mathbb{R}^N$  y  $v \in \mathbb{R}^N$ , sea  $n \in \mathbb{N}^*$  se tiene que:

$$\|T_n(u) - T_n(v)\| = \left\| \frac{n-1}{n} (T(u) - T(v)) \right\|$$

Y, desarrollando

$$\|T_n(u) - T_n(v)\| = \frac{n-1}{n} \|T(u) - T(v)\| \leq L \|(u-v)\|$$

Con ello  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  se tiene que  $T_n$  es contractante, entonces por el teorema del punto fijo  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  existe un único  $x_n \in \mathbb{R}^N$  tal que  $T_n(x_n) = x_n$ .

En consecuencia, tenemos que  $\forall n \in \mathbb{N}$  existe un único  $x_n \in \mathbb{R}^N$  tal que  $T_n(x_n) = x_n$  lo que equivale a:

Existe una única sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$  tal que  $T_n(x_n) = x_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

- (ii)(1.5 pts.) Asumamos que la sucesión de la parte anterior converge en  $\mathbb{R}^N$  a  $y \in \mathbb{R}^N$ .

#### Forma difícil:

Entonces

$$\|T(y) - y\| = \|(T(y) - T(x_n) + T(x_n) - T_n(x_n) + T_n(x_n) - y)\|$$

Por desigualdad triangular y ocupando que  $T_n(x_n) = x_n$

$$\|T(y) - y\| \leq \|T(y) - T(x_n)\| + \|T(x_n) - T_n(x_n)\| + \|x_n - y\|$$

Luego, por la contractancia de  $T$  y juntando términos

$$\|T(y) - y\| \leq \|T(x_n) - T_n(x_n)\| + (L+1)\|x_n - y\|$$

Finalmente, reemplazando  $T(x_n)$  y  $T_n(x_n)$

$$\|T(y) - y\| \leq \frac{1}{n} \|a - T(x)\| + (L+1)\|x_n - y\|$$

Como  $a - T(x)$  pertenece a  $\mathbb{R}^N$ , se tiene que  $\|a - T(x)\| < \infty$  y está fijo para  $n$ . Con ello, tomando límite en  $n$ ,  $\frac{1}{n} \|a - T(x)\| + (L+1)\|x_n - y\| \rightarrow 0$  y, en consecuencia,  $\|T(y) - y\| = 0$ . Por tanto  $T(y) = y$ .

#### Forma fácil:

Como vimos en clases es fácil probar que si  $T$  es contractante entonces es continua, luego de la igualdad

$$T_n(x_n) = \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} T(x_n) = x_n \quad ,$$

tomando límite se obtiene que  $T(y) = y$ .

Como explicamos  $T$  tiene un único punto fijo que llamamos  $x_0$ , entonces  $T(y) = y = x_0$ .

(b) (i)(1.5 pts.) Consideremos las ecuaciones

$$\frac{(n-1)}{2} \cdot \sin(x_n) - (n \cdot x_n - \pi) = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Notemos que estas son equivalentes a

$$\frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\sin(x_n)}{2} + \frac{\pi}{n} = x_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Con lo cual, si definimos  $T$  mediante  $T(x) = \frac{\sin(x)}{2} \forall x \in \mathbb{R}$  se tiene que lo que queremos probar es que existe una única sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$  que resuelve

$$T_n(x_n) = x_n$$

Si probamos que  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es contractante esto será directo de (a)(i).

Veamos que  $T$  es contractante:

Sean  $u, v$  en  $\mathbb{R}$  y supongamos que  $u \leq v$ , entonces

$$\left| \frac{\sin(v)}{2} - \frac{\sin(u)}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_u^v \cos(w) dw \right|$$

Con ello,

$$\left| \frac{\sin(v)}{2} - \frac{\sin(u)}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \int_u^v |\cos(w)| dw \leq \frac{1}{2} |v - u|$$

Concluyendo entonces lo requerido.

(ii)(1.5 pts.) Suponiendo que la sucesión de la parte anterior converge a  $y \in \mathbb{R}$

**Forma difícil:**

Se tiene que  $y \geq -\frac{1}{2}$ .

En efecto, como para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  se cumple que  $(n-1) * \frac{\sin(x_n)}{2} \geq \frac{-1}{2} * (n-1)$ , entonces

$$\frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\sin(x_n)}{2} + \frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{n} - \frac{n-1}{2n}.$$

Así,

$$x_n \geq \frac{\pi}{n} - \frac{n-1}{2n} \geq -\frac{n-1}{2n}.$$

Esta última desigualdad implica que  $y \geq \lim_n -\frac{n-1}{2n} = -\frac{1}{2}$  y tenemos entonces lo requerido.

Para finalizar, de la parte (a)(ii) se desprende que debe tenerse que  $T(y) = y$ , es decir

$$\frac{\sin(y)}{2} = y,$$

ecuación que caracteriza (en principio no únicamente) a  $y$ .

**Forma fácil:**

De la parte (a)(ii) se desprende que debe tenerse que  $T(y) = y$ , es decir

$$\frac{\sin(y)}{2} = y,$$

ecuación que caracteriza (en principio no únicamente) a  $y$ .

Entonces es directo que  $y \geq \frac{-1}{2}$  ya que  $\sin(y) \geq -1$ .